Examen de l'Association canadienne des physiciens et physiciennes (2007)

Mardi, 6 février 2007

Durée: 3 heures

Directives:

Les calculatrices sont permises.

Cet examen compte 10 questions, réparties sur 11 pages.

Chaque question sera corrigée par un correcteur différent, donc **la solution de chaque problème doit figurer sur des pages distinctes. Pour chaque question,** les pages de la solution doivent être agrafées ensemble et le nom du candidat, de son institution et de son département doivent apparaître clairement sur la première page.

Toutes les questions ont la même valeur. Vous n'êtes pas tenus de répondre à toutes! Relaxez et attaquez-vous aux questions qui portent sur les matières qui vous sont les plus familières ou qui vous semblent les plus intéressantes.

Les solutions doivent être envoyées par les directeurs de département à :

Dr. L. Zedel
Department of Physics and Physical Oceanography
Memorial University of Newfoundland
St. John's, NL
A1B 3X7

La traduction française de cet examen a été préparée par David Sénéchal (Université de Sherbrooke).

Les membres du comité d'examen sont :

Iakov Afanassiev, Todd Andrews, Luc Beaulieu, Stephanie Curnoe, Entcho Demirov, Eric Meloche, Mike Morrow, Martin Plumer, Ivan Saika-Voivod, John Whitehead, Anand Yethiraj, et Len Zedel.

QUESTION 1

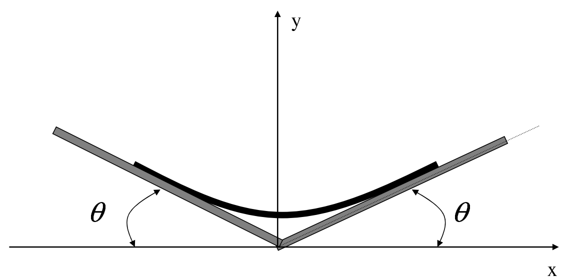
Une corde de longueur L et de masse m repose sur deux plans inclinés à un angle θ (que vous êtes libres de choisir), comme illustré ci-dessous. La corde a une densité de masse uniforme et son coefficient de frottement avec les plans est $\mu_s = 1$. Le système est symétrique par rapport à l'axe des y.

(a) Dessinez un diagramme de forces pour la corde (Indice: considérez la fraction de la corde qui n'est pas en contact avec les plans séparément des segments qui sont en contact).

(b) Étant donné que la corde est en équilibre statique, écrivez la première loi de Newton en composantes.

(c) En utilisant les équations trouvées en (b), obtenez une expression pour la fraction f de la corde qui n'est pas en contact avec les plans, en fonction de l'angle θ.

(d) Pour quel angle θ cette fraction f est-elle maximum?



QUESTION 2

L'équation de Schrödinger pour des particules libres en trois dimensions est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_k(\mathbf{r}) = \varepsilon_k\psi_k(\mathbf{r}). \tag{1}$$

(a) En supposant que les solutions à l'équation (1) sont des ondes planes :

$$\psi_k(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{2}$$

montrez que l'énergie a la forme

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{3}$$

(b) Si $\psi_k(\mathbf{r})$ est périodique en x, y et z avec une période L, quelle est la condition sur le vecteur d'onde $\mathbf{k}$?

(c) En mécanique quantique, l'opérateur de quantité de mouvement est donné par

$$\mathbf{p} = -i\hbar\vec{\nabla}.$$

Trouvez alors la vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule dans l'état $\psi_k(\mathbf{r})$.

(d) Dans l'état fondamental d'un système de volume $V = L^3$ contenant N électrons libres, les orbitales occupées correspondent à des points à l'intérieur d'une sphère de rayon k_F dans l'espace des $\mathbf{k}$. La surface de cette sphère est appelée "surface de Fermi". Montrez que le rayon de cette sphère est

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(e) En partant de la réponse à (d), quelle est l'énergie de Fermi ε_F (l'énergie d'une particule à la surface de Fermi)?

(f) Montrez que la densité d'états $D(\varepsilon_F)$ à l'énergie de Fermi est:

$$D(\varepsilon_F) \equiv \left.\frac{dN}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_F} = \frac{3N}{2\varepsilon_F}.$$

QUESTION 3

Considérer une particule chargée dans un champ magnétique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. En raison de la symétrie de jauge, il y a un nombre infini de choix possibles pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ tels que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Ce problème traite de deux choix populaires, la "jauge de Landau" :

$$\mathbf{A} = (-BY, 0, 0)$$

et la "jauge circulaire" ou "symétrique" :

$$\mathbf{A} = (-BY/2, BX/2, 0).$$

Le Hamiltonien d'une particule de charge électrique q dans un champ magnétique est

$$H_0 = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2}{2m}.$$

(a) Dans la jauge de Landau, trouvez deux opérateurs dans la liste $\{P_x, P_y, P_z, J_z\}$, qui commutent avec H_0 (deux opérateurs A et B commutent quand $[A, B] = AB - BA = 0$). Notez que

$$[R_i, R_j] = [P_i, P_j] = 0$$

$$[R_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z).$$

(b) Les opérateur trouvés en (a) commutent-ils entre eux?

(c) Répétez les parties (a) et (b), cette fois dans la jauge circulaire.

(d) Choix multiple: identifiez la bonne assertion parmi les quatre suivantes et justifiez votre réponse par une courte explication:

Le fait qu'il existe deux ensembles différents d'opérateurs qui commutent entre eux et avec H_0, et que ces deux ensembles ne commutent pas entre eux, entraîne que

i. Les valeur propres de H_0 sont positives.

ii. Les vecteurs propres de H_0 sont dégénérés.

iii. H_0 n'a pas d'état fondamental.

iv. La position de la particule ne peut pas être déterminée.

QUESTION 4

Le champ gravitationnel d'un trou noir est si fort que rien ne peut s'en échapper, pas même la lumière. Donc, jeter quelque chose dans un trou noir est un processus irréversible et par conséquent l'ajout de masse à un trou noir augmente son entropie.

(a) Par analyse dimensionnelle, trouvez une expression ayant les unités d'une longueur impliquant la constante de gravitation G, la masse du trou noir M et la vitesse de la lumière c. Ceci définit une longueur caractéristique pour le trou noir.

(b) On peut montrer que l'entropie d'un trou noir est $S \sim N_{\text{max}}\, k_{\text{B}}$, où k_{B} est la constante de Boltzmann et N_{max} est le nombre maximum de particules qui auraient pu être utilisées pour créer le trou noir. Pour estimer N_{max}, supposez que les particules en question sont des photons de longueur d'onde $\sim L$, et que l'énergie du trou noir est $U = Mc^2$. Trouvez une expression de S in fonction de G, M, c, k_{B} et h (la constante de Planck). S devrait augementer avec M.

(c) En supposant le volume constant, obtenez une expression de la chaleur spécifique du trou noir en fonction de G, M, c, k_{B} et h. La chaleur spécifique devrait être négative.

QUESTION 5

(a) Une boîte de volume V contient N particules libres et indiscernables. Dans l'approximation des faibles densités, la fonction de partition de ce système est

$$Z(N,V) = \frac{(V/\lambda_{\text{th}}^3)^N}{N!}$$

où λ_{th} est la longueur d'onde thermique de de Broglie. Que serait la fonction de partition si les particules étaient discernables?

(b) Deux boîtes de volumes V_1 et V_2 sont séparées par une distance verticale H et sont reliées par un tube étroit (la boîte 1 est située au-dessus de la boîte 2). Les deux boîtes sont à la même température T est ont une épaisseur négligeable devant H. Ensemble, les deux boîtes contiennent N_{total} particules, chacune de masse m, à faible densité.

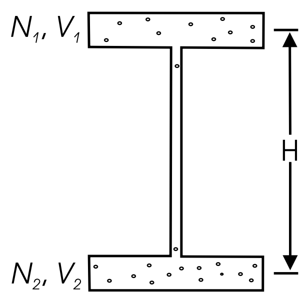


Figure 1.

i. Quelle est la fonction de partition $Z(N_1, N_2)$ quand il y a N_1 particules dans la boîte 1 et N_2 dans la boîte 2?

ii. À l'équilibre thermique, quel est le rapport entre les densités de particules des deux boîtes? (Rappel: l'énergie libre de Helmholtz est définie par $F = -kT \ln Z$).

iii. Considérez la situation hors équilibre où les densités des deux boîtes sont égales. Quelle est la différence de potentiel chimique entre les deux volumes? Expliquez brièvement votre réponse. Dans quel volume les particules ont-elles le plus grand potentiel chimique?

QUESTION 6

Dans un océan de profondeur H, la densité varie en fonction de la profondeur comme $\rho = \rho_0(1 + cz)$, où ρ_0 est la densité à la surface, c est une constante et l'axe des z positifs est dirigé vers bas (typiquement, la densité varie en raison de la concentration variable de sel à différentes profondeurs, le fluide plus léger au-dessus du plus dense, assurant ainsi la stabilité statique d'une colonne de fluide).

(a) Trouvez la dépendance de la pression hydrostatique en fonction de la profondeur.

(b) Trouvez la masse totale d'une colonne de fluide de section unité et la position de son centre de masse. Celui-ci est-il au-dessus ou au-dessous du milieu ($H/2$) de la colonne?

(c) Si la colonne d'eau est mélangée (par des vagues, de la turbulence, etc.), quelle est la densité de la colonne lorsqu'elle est uniforme? Quelle est alors le changement dans l'énergie potentielle de la colonne?

(d) Suggérez une distribution qui minimise l'énergie potentielle de la colonne, étant donné que la masse totale de la colonne est fixe et que la densité doit varier entre une valeur minimum ρ_0 à la surface et une valeur maximale au fond.

QUESTION 7

Une chambre à bulle contient un liquide très proche de son point d'ébullition. Un fort champ magnétique dévie les particules chargées dans un sens ou l'autre. Des particules de haute énergie peuvent donner naissance à des bulles de gaz micrométriques le long de leurs trajectoires – ce qu'on appelle un "événement". Les particules neutres sont, quant à elles, invisibles. La photographie ci-dessous illustre un événement associé à la désintégration du kaon :

$$K^- \to \pi^- + \pi^0 \tag{1}$$

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \tag{2}$$

Le rayons gammas frappent un plaque de plomb et donnent naissance à des paires électron-positron.

$$\gamma \to e^+ + e^- \tag{3}$$

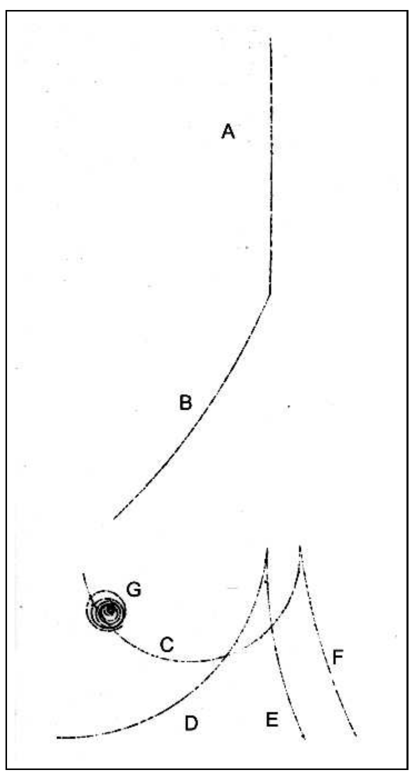
(a) Identifiez les particules élémentaires correspondant aux trajectoires marquées d'une lettre dans la figure ci-dessous (indice: la boucle marquée G représente un électron supplémentaire qui a été éjecté d'un atome et qui ne fait pas partie de l'événement étudié).

(b) Que pouvez-vous dire, à partir de cette figure, sur le rapport charge/masse du positron (signe et grandeur), en comparaison de celui de l'électron? Justifiez en une phrase.

(c) Dans quelle direction le champ magnétique pointe-t-il?

(d) La masse de l'électron est 0,511 Mev/c^2. Quelle est l'énergie minimale des rayons gamma dans l'événement?

(e) Les rayons gamma ne peuvent pas se convertir en paires électron-positron dans l'espace libre (d'où la nécéssité de la feuille de plomb). Utilisez la relativité restreinte pour expliquer, en deux phrases, pourquoi cela est ainsi.

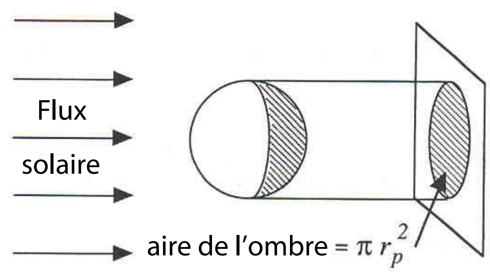


QUESTION 8

Un corps noir à la température T émet un flux de rayonnement Υ (en W/m^2) donné par

$$\Upsilon = \sigma T^4$$

où $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\, W m^{-2} K^{-4}$. La constante solaire est le flux de rayonnement solaire à une distance r_e du soleil ($r_e = 1$ U.A., soit le rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du soleil). À la limite supérieure de l'atmosphère terrestre, la constante solaire est de $S_0 = 1367\,\mathrm{W/m}^2$. Supposez que la Terre n'absorbe qu'une fraction $(1-\alpha_p)$ du rayonnement solaire incident sur la haute atmosphère et que la Terre est un corps noir avec une température d'émission moyenne T_e. Parce que la température de la Terre est stable, le flux total émis par la Terre doit équilibrer le rayonnement solaire absorbé par la Terre.



(a) Montrez que:

$$\frac{S_0}{4}(1-\alpha_p) = \sigma T_e^4$$

(b) Calculez T_e pour une valeur typique de l'albedo $\alpha_p = 0.3$. La température moyenne réelle de la surface terrestre est $T_a = 289K$. Pourquoi les valeurs T_a et T_e sont-elles différentes?

(c) Jupiter jouit d'une source de chaleur interne provenant de son effondrement gravitationnel. Donc le flux sortant de rayonnement planétaire, égal à σT_j^4, est équilibré par cette source additionnelle de chaleur et par le rayonnement solaire. Le rayon moyen de Jupiter est R_j =69 500 km; le rayon moyen de son orbite autour du soleil est de 5,19 unités astronomiques (une unité astronomique est le rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du soleil). L'albedo de Jupiter est $\alpha_p = 0,51$ et la température d'émission mesurée de Jupiter est $T_j = 130K$. Calculez la grandeur de la source interne de chaleur de Jupiter, par unité de volume.

QUESTION 9

La condition d'existence de modes de propagation dans une fibre optique est qu'une onde qui subit N réflexions internes doit interférer de manière constructive avec une onde qui en subit $N + 1$. Ceci ne peut se produire que pour certaines directions de propagation.

(a) En utilisant l'exemple du guide d'onde à plans parallèles illustré ci-dessous, démontrez la condition d'interférence

$$\frac{\pi n_1 \gamma}{\lambda} + \delta_r = m\pi,$$

où n_1 est l'indice de réfraction du matériau dans le coeur, γ est la différence géométrique entre les chemins parcourus, λ est la longueur d'onde, δ_r est la différence de phase induite par la réflexion et m est un entier (l'indice du mode de propagation).

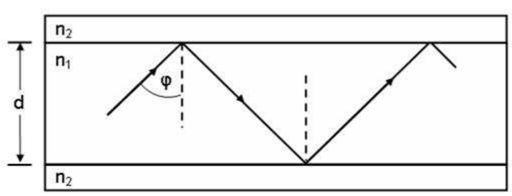
(b) En utilisant la relation ci-haut, montrez que chaque mode de propagation est caractérisé par une direction φ_m reliée à l'indice entier m par

$$m \simeq \frac{2 n_1 d \cos \varphi_m}{\lambda}.$$

(c) Sur la base de cette dernière relation, démontrer l'expression suivante du nombre maximum de modes permis:

$$m_{max} = \frac{2d}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} + 1.$$

(d) Si les indices de réfraction du guide d'onde sont 1,465 et 1,460, quelle est la valeur de d requise pour qu'un seul mode de propagation soit possible à la longueur d'onde $1,50\ \mu$m?



QUESTION 10

Une boucle de courant circulaire de rayon a est centrée à l'origine et contenue dans le plan xy. Un courant alternatif $I = I_0 e^{-i\omega t}$ y circule. À une distance $r \gg a$ de l'origine, les champs électrique et magnétique sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{H} &= (ka)^2 I_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4r} \sin\theta\,\hat{\theta} \\ \vec{E} &= -(ka)^2 Z_0 I_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4r} \sin\theta\,\hat{\phi} \end{aligned} \tag{1}$$

où $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ sont les vecteurs unitaires en coordonnées sphériques, $k = \omega/c$ et $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376,7\Omega$.

(a) Calculez le vecteur de Poynting complexe $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*$, pour $r \gg a$.

(b) Montrez que la puissance (rms) rayonnée par la boucle est $P = I_0^2 R_{\mathrm{rad}}$, où R_{rad} est la résistance de rayonnement de la boucle, et obtenez la forme de R_{rad}.

(c) Si la résistance ohmique de la boucle est de $1,0\ \Omega$, calculez le rapport a/λ pour lequel la résistance de rayonnement est égale à la résistance ohmique.