Examen de l'Association canadienne des physiciens et physiciennes (2008)

Préparé par le département de physique et d'astronomie, University of Victoria

Problème 1. Mécanique : rondelle de hockey en rotation.
Une rondelle de hockey de rayon R et de masse m est initialement en rotation à une vitesse angulaire ω, son côté plat complètement en contact avec la glace, avec un coefficient de frottement μ. Déterminez le temps nécessaire pour qu'elle s'arrête de tourner.

Problème 2. Mécanique : période d'oscillation dans un potentiel quartique
Une particule ponctuelle se déplace dans un potentiel unidimensionnel $V(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Les paramètres $a,\ b,\ c,\ d$, et e sont arbitraires, sauf pour la condition que le potentiel doit contenir deux régions de mouvement borné pour une énergie totale donnée E, tel qu'illustré à la figure 1.

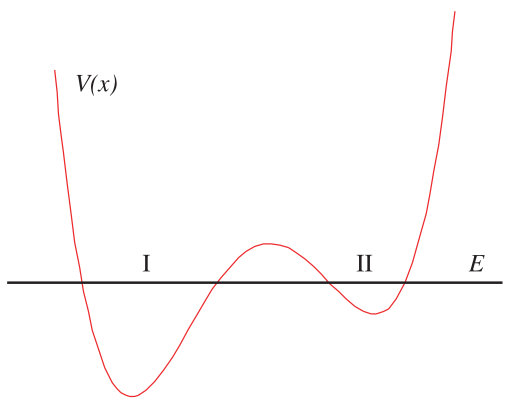

Fig. 1 –

Démontrez que, pour une énergie donnée E, les périodes d'oscillations dans les régions I et II sont égales :

$$T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{II}}\ .$$

Problème 3. Électromagnétisme : Mouvement dans des champs externes
La composition d'un alliage de lithium et de sodium est étudiée à l'aide de la méthode suivante. Un échantillon est vaporisé et partiellement ionisé en le chauffant à une température de 2000K. Ensuite, la fraction ionisée est accélérée à une énergie $E \gg kT$ par un champ électrique uniforme, pour former un faisceau d'ions qui est ensuite envoyé à travers un champ magnétique uniforme perpendiculaire au faisceau. Les ions sont comptés par un détecteur sensible à la position, situé dans un plan perpendiculaire à la direction du faisceau, qui enregistre les impacts des ions en fonction de la position sur le détecteur. L'image qui en résulte (unités arbitraires) est illustrée à la figure 2.

a) D'après ces données, quelles sont les concentrations approximatives de Na et de Li dans l'alliage original ? L'énergie d'ionisation du sodium est $I_{\mathrm{Na}} = 5.139$ eV, et celle du lithium est $I_{\mathrm{Li}} = 5.392$ eV.

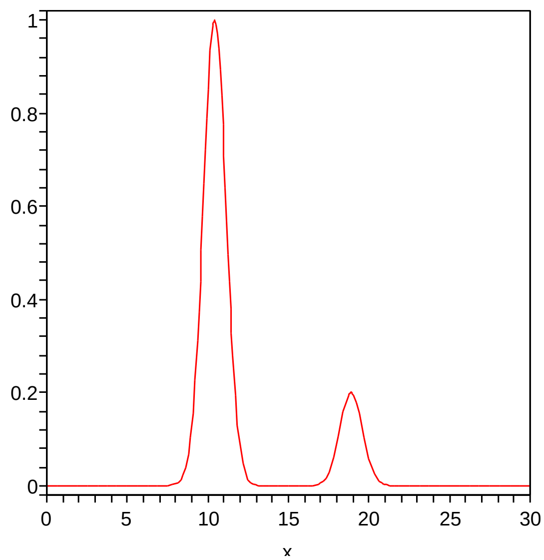

FIG. 2 –

b) À partir de la figure 2, determinez le rapport des masses entre les atomes de sodium et de lithium, étant donnée que $x = 0$ correpond à la trajectoire du faisceau en l'absence de champ magnétique. Vous devez supposer que les angles de déflection causés par le champ magnétique sont petits.

Problème 4. Électromagnétisme : capacité de deux sphères conductrices qui se touchent

La capacité d'un conducteur portant une charge Q et élevé à un potentiel V (le zéro du potentiel étant à l'infini) est définie comme $C = Q/V$. Trouvez la capacité d'un conducteur formé de deux sphères de rayon R se touchant en un point (Fig. 3).

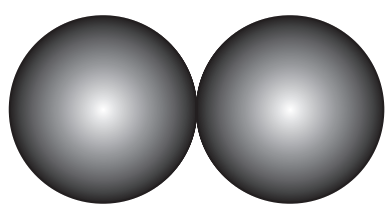

FIG. 3 –

Problème 5. Matière condensée : émission de phonons

Les neutrons se propageant dans la matière ont une relation de dispersion quadratique : $E_n(k) = (\hbar k)^2/(2m_n)$. Dans certaines conditions, ils peuvent perdre de l'énergie en émettant des phonons qui, eux, ont une relation de dispersion linéaire : $E_{ph}(k) = c_s(\hbar k)$, où c_s est la vitesse du son. Trouvez la condition que doit satisfaire l'énergie d'un neutron pour qu'il puisse perdre de l'énergie par émission de phonons. Donnez une estimation numérique de cette énergie à partir de valeurs typiques de c_s dans les solides.

Problème 6. Mécanique statistique : condensation de Bose-Einstein dans un champ

Considérez un gaz parfait de particules non relativistes obéissant à la statistique de Bose-Einstein (spin zéro) dans un champ de force externe agissant dans la direction z, avec potentiel

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2.$$

Vous pouvez traiter le mouvement des particules dans ce potentiel selon les lois de la mécanique classique. Trouvez la température critique T_0 au dessous de laquelle la condensation de Bose-Einstein se produit. La masse des particules est m, le nombre total de particules est N et le mouvement dans le plan xy est limité à une aire A, c'est-à-dire que le nombre de particules par unité de surface dans le plan xy est N/A. Faites un schéma de la distribution des particules en fonction de z pour les température $T < T_0$.

Indices : La distribution de Bose-Einstein est donnée par

$$dN = \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})-\mu}{kT}\right) - 1},$$

où $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est l'énergie d'une particule et μ le potentiel chimique qui s'annule à $T = T_0$. Une intégrale utile est : $\int_0^\infty x dx/(e^x - 1) = \pi^2/6$.

Problème 7. Mécanique statistique : élargissement diffusif d'un faisceau

Un faisceau idéal et froid de particules de masses M, de vitesse longitudinale $v_\parallel = v_0$ et de vitesse transverse nulle ($v_\perp = 0$) pénètre dans une enceinte contenant un gaz maintenu à température T. Les collisions entre les particules du gaz et du faisceau sont élastiques et isotropes, avec une section efficace σ_0. Estimez la vitesse transverse typique des particules du faisceau $(v_\perp^2)^{1/2}$ après qu'elles aient parcouru une distance L dans le gaz, dans les deux cas suivants :

a) Les particules du gaz sont non relativistes, de masse $m \ll M$ et de densité n (nombre par unité de volume). Supposez que $n\sigma_0 L \gg 1$ et négligez les changement possibles dans la composante longitudinale de la vitesse des particles du faisceau. Esquissez la dépendance en L de $|v_\perp(L)|$.

b) Répétez la partie (a) dans le cas d'un gaz de photons à température T.

Problème 8. Mécanique quantique : énergie de liaison d'un ion moléculaire d'hydrogène par la quantification de Bohr

L'ion moléculaire hydrogène H_2^+ comporte deux protons et un électron et est la molécule diatomique la plus simple. Utilisez la condition de quantification de de Broglie – la longueur de l'orbite de l'électron doit être un multiple entier de la longueur d'onde de de Broglie – afin de trouver l'énergie de liaison de ce système. Pour y parvenir, supposez des orbites circulaires dans le plan de symétrie de la molécule, équidistant entre les deux protons (fig. 4) et calculez l'énergie E de l'état fondamental en fonction de la distance proton-proton R_p ; le minimum de la fonction $E(R_p)$ est l'énergie de liaison. Comment votre résultat se compare-t-il à la valeur exacte $E = -16.4$eV ? (Notez que cette énergie est inférieure de 2.8eV à celle d'un atome d'hydrogène accompagné d'un proton libre – donc l'ion H_2^+ est stable). Si vous trouvez un désaccord, peut-on y attribuer une raison physique ? L'énergie cinétique des protons peut-elle être négligée dans ce calcul ?

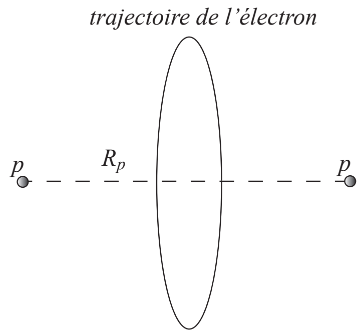

FIG. 4 –

Indices : La minimisation de $E(R_p)$ doit être faite numériquement et une estimation à $\sim 10 - 15\%$ près est suffisante. Mesurez toutes les énergies en unités de l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène ($E_b = 13.6$eV) et toutes les distance en unités du rayon de Bohr $a_B = 5.3 \times 10^{-9}$cm.

Problème 9. Mécanique quantique : effet tunnel à travers un mur

Considérons le mouvement quantique d'une particule de masse m dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. Ce potentiel (illustré à la fig. 5) est composé d'une mince barrière (fonction delta) séparant un puits carré infini en deux compartiments égaux de longueur a :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad |x| > a \\ g\delta(x) & \text{si} \quad |x| < a, \quad \text{où} \quad g > 0 \end{cases}$$

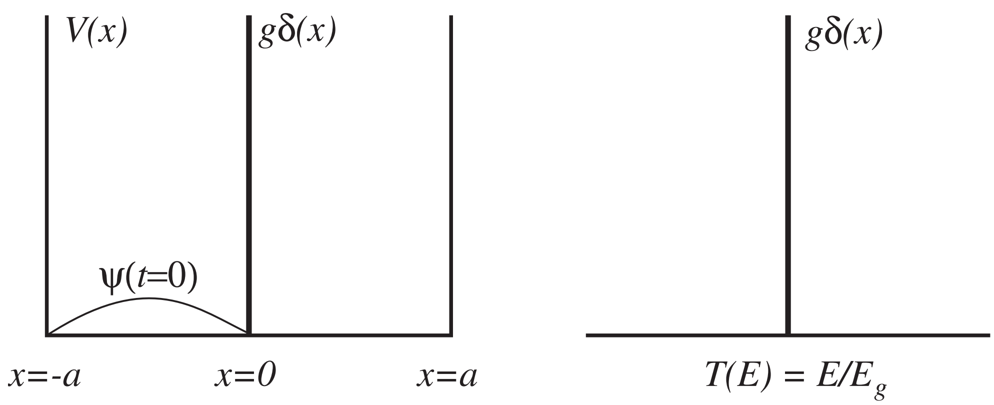

FIG. 5 –

a) Il est connu que le coefficient de transmission (le rapport entre les flux transmis et incident) à travers une barrière delta isolée est petit et donné par $T(E) = E/E_g$ pour des énergies incidentes de l'ordre de $\hbar^2/(ma^2)$. Trouvez E_g en fonction de la force g de la barrière delta.

b) Trouvez, de manière approximative en effectuant un développement en puissances du petit paramètre $\hbar^2/(ma^2E_g)$, les énergies propres et les fonctions d'ondes correspondant aux deux états de plus basses énergies dans le potentiel $V(x)$.

c) Calculez l'évolution dans le temps d'un état concentré initialement dans le compartiment de gauche et décrit par la fonction d'onde

$$\psi(x,t=0) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\pi x/a) & \text{si } -a<x<0, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Déterminez le temps t_0 requis pour "passer à travers le mur", défini par la condition

$$\int_0^a |\psi(x,t=t_0)|^2 dx \sim O(1)$$

Problème 10. Principe d'équivalence

Une roche à la surface d'une planète contient une certaine quantité de l'élément X se désintégrant en un élément Y avec une vie moyenne τ_0. Une explosion puissante brise la roche en deux fragments. L'un des fragments reste à la surface près du lieu de l'explosion alors que l'autre est projeté à la verticale, pour ensuite revenir à la surface de la planète sous l'effet de la gravité, après un temps T, tel que mesuré par des horloges à la surface. Au retour, les rapports N_X/N_Y des nombres d'atomes de chaque espèce dans les deux fragments sont comparés, car ils ont pu être affectés par des effets relativistes et/ou gravitationnels. En supposant que les éléments sont distribués de manière uniforme dans la roche avant l'explosion, comparez qualitativement les rapports N_X/N_Y dans les deux fragments après le retour du deuxième fragment et justifiez votre réponse. En supposant que la vitesse du deuxième fragment après l'explosion est non relativiste, que le champ gravitationnel g est uniforme et que le temps de vol T est beaucoup plus court que τ_0, calculez la différence dans les pourcentages d'atomes X désintégrés dans les deux fragments.

Constantes physiques utilisées dans cet examen :

Vitesse de la lumière $c = 3\times10^{10}$cm/s
Constante de Boltzmann $k = (1\text{eV})/(11600\text{K}) = 1.38\times10^{-23}$J/K
Constante de Planck $\hbar = 2\times10^{-5}$ eV cm$/c = 1.1\times10^{-34}$ J s
Masse de l'électron $m_e = 5.1\times10^5$ eV$/c^2 = 9.1\times10^{-31}$ kg
Masse du neutron $m_n = 0.94\times10^9$ eV$/c^2 = 1.7\times10^{-27}$ kg
Masse du proton $m_p = 0.94\times10^9$ eV$/c^2 = 1.7\times10^{-27}$ kg
Constante de structure fine $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ (En unités SI $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$)
Rayon de Bohr $a_B = \hbar/(\alpha m_e c) = 5.3\times10^{-9}$cm
Énergie de liaison de l'atome d'hydrogène $E_b = \hbar^2/(2m_e a_B^2) = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 = 13.6$ eV