Concours universitaire 2005 de l'Association canadienne des physiciens et physiciennes

Mardi, 8 février 2005

Durée: 3 heures

Instructions:

L'utilisation d'une calculatrice est permise.

Répondre à chaque question dans un cahier différent. Sur la première page de chaque cahier, bien indiquer le numéro de la question, votre nom ainsi que le nom de votre université et de votre département.

Répondez à autant de questions que possible, au complet ou en partie. Il serait assez étonnant que vous réussissiez à répondre à toutes les questions; vous avez donc intérêt à travailler d'abord celles qui vous semblent les plus abordables.

Les questions sont toutes de même valeur.

Bonne chance! Nous espérons que l'expérience vous plaira.

Les cahiers d'examen doivent être retournés à :

Dr. Douglas Dahn
Department of Physics
University of Prince Edward Island
550 University Avenue
Charlottetown, PE   C1A 4P3

L'examen de cette année est le résultat d'une collaboration entre UPEI (Doug Dahn, Sheldon Opps), Mount Allison University (Mohammad Ahmady), Université de Moncton (Jean Desforges), Acadia University (Svetlana Barkanova), St. Mary's University (Joe Hahn), et Saint Francis Xavier University (Carl Adams, Robert Wickham).

1. Une mince tige de longueur L a une densité de masse linéaire qui varie selon $\lambda(x) = \lambda_0 x/L$, où x est la distance par rapport à un bout de la tige et λ_0 est une constante. La tige est suspendue par son extrémité la plus légère à un pivot et est soumise à l'influence de l'accélération gravitationnelle (constante = g).

   (a) À quelle distance se situe le centre de masse de la tige par rapport au pivot?

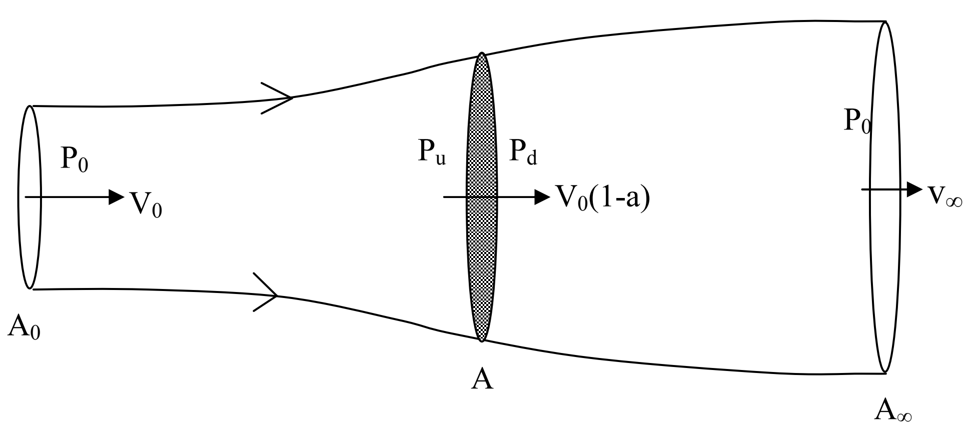
   (b) Quel est le moment d'inertie de la tige en rotation autour du pivot?

   (c) Soit θ, le déplacement angulaire de la tige avec la verticale. Quel est le couple de force exercé sur la tige par la gravité par rapport au pivot?

   (d) Quelle est la fréquence naturelle de la tige dans la limite des petites oscillations?

2. (a) De l'air de densité ρ circule avec une vitesse d'écoulement uniforme v_0 à travers une surface A normale à la direction de l'écoulement. À quel taux l'énergie cinétique est-elle transportée à travers la surface A?

   (b) On souhaite extraire une partie de cette énergie en construisant un moulin tel qu'illustré ci-dessous. Les pales de l'hélice du moulin balaient une surface A. À grande distance en amont de l'hélice, l'air circule à vitesse constante v_0. La vitesse de l'air est $v_0(1-a)$ à la hauteur de l'hélice et v_∞ loin en aval. La figure montre les lignes de courant de l'air, lesquelles définissent un tube d'écoulement de section transverse A_0 loin en amont et A_∞ loin en aval. La pression atmosphérique est P_0 à grande distance de chaque côté de l'hélice, P_u juste avant l'hélice et P_d juste après l'hélice.



En supposant que l'air est incompressible et se comporte comme un fluide idéal, sauf dans la région d'interaction avec l'hélice, utilisez l'équation de Bernoulli pour trouver la discontinuité de la pression $\Delta P = P_u - P_d$ en fonction de ρ, v_0, et v_∞.

(c) En faisant le bilan des quantités de mouvement entrante et sortante, montrez que la force F exercée sur l'hélice est donnée par $F = \rho(A_0 v_0^2 - A_\infty v_\infty^2)$.

(d) On sait aussi que $F = A\,\Delta P$. En combinant cette relation avec le résultat (c), et en considérant que la masse est conservée, vous devriez pouvoir éliminer v_∞ de l'équation pour F. Trouvez alors la puissance transférée de l'air à l'hélice.

(e) Quelle valeur du paramètre *a* maximise la puissance transférée à l'hélice? Pour ce cas optimal, quel pourcentage de la puissance trouvée en (a) est transférée?

3. Une masse *m* d'eau à température T_1 est mélangée de façon isobare et adiabatique avec une quantité égale d'eau à température T_2. Montrez que la variation d'entropie de l'univers est

$$2mC_p \ln\left(\frac{(T_1+T_2)/2}{\sqrt{T_1T_2}}\right),$$

et montrez que ce résultat est positif. C_p est la chaleur spécifique de l'eau à pression constante qu'on peut prendre indépendante de la température. Indice : Comment peut-on <u>montrer</u> que la température finale est

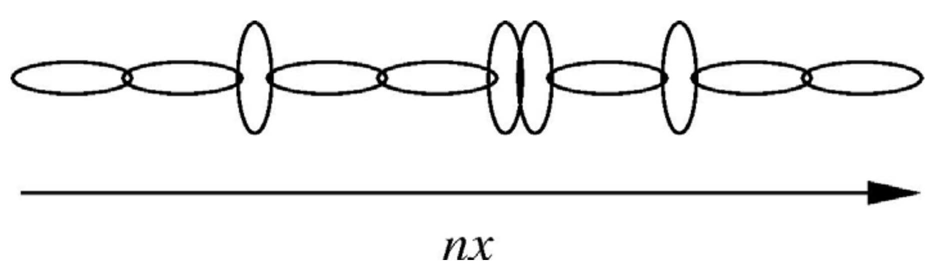
$$T_F = \frac{1}{2}\left(T_1+T_2\right) \ ?$$

4. La figure ci-dessous montre une chaîne unidimentionnelle constituée de $n \gg 1$ anneaux. La longueur de chaque anneau est a si son orientation est parallèle à la chaîne et zéro si son orientation est perpendiculaire à la chaîne. Chaque anneau ne peut avoir que deux états distincts : horizontal ou vertical. La distance d'un bout à l'autre de la chaîne est nx.

(a) Trouvez l'entropie de la chaîne en fonction de x.

(b) Obtenez une relation entre la température T de la chaîne et la tension F nécessaire pour maintenir la distance nx, en supposant que les points de jonction tournent librement.

(c) Sous quelles conditions votre réponse conduit-elle à la loi de Hooke?



5. Une particule de masse *m* est sujette à une force centrale qui varie selon $F(r) = -kr^2$, où *k* est une constante positive et *r* est la distance par rapport à l'origine de la force.

   (a) Quel est le Lagrangien du système?

   (b) Quelles sont les équations du mouvement de Lagrange?

   (c) Identifiez deux quantités conservées.

   (d) Trouvez la fréquence des petites oscillations radiales au voisinage d'une orbite circulaire de rayon $r = b$.

6. (a) Un muon (une particule de charge –e et de masse égale à 207 fois la masse de l'électron) est capturé par un deutéron pour former un atome muonique. Trouvez l'énergie de l'état fondamental et du premier état excité.

   (b) Un train voyage avec une vitesse *v* par rapport au sol. Un oiseau, volant le long des rails dans la même direction que le train, se déplace avec une vitesse *v* par rapport au train. Un avion, se déplaçant aussi dans la même direction, a une vitesse *v* par rapport à l'oiseau.

   D'après Newton, quelle est la vitesse de l'avion par rapport au sol? D'après Einstein, quelle est la vitesse de l'avion par rapport au sol?

7. (a) Calculez le commutateur $[\, e^{ia\,\hat{p}\,/\,\hbar}\, ,\, \hat{x}\,]$.

   (b) Nous savons que deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent selon $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$.
   Trouvez $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}$.

8. Bloc magnétique semi-infini.

   (a) On considère une «feuille de courant» infinie dans le plan x-y; un courant y circule dans la direction x. La densité de courant bidimensionnelle, parfois notée **K** est ici donnée par

$$\vec{K} = K_0 \hat{i}$$

   pour z = 0. Le régime d'écoulement est stationnaire et il n'y a pas d'autre courant dans le problème; le courant est libre.

   En invoquant au besoin la loi de Biot-Savart, la version magnétique de la loi de Gauss, et la symétrie du problème, déduire la forme que devrait prendre le champ magnétique **B**.

Calculez le champ magnétique au-dessus et au-dessous du plan en utilisant la loi d'Ampère. (Indice : la symétrie du problème suggère que $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{B}(x,y,-z)$.)

(b) Supposons maintenant que la région au-dessous du plan x-y est constituée d'un matériel magnétique de susceptibilité magnétique χ_m. En réponse à la feuille infinie de courant, un courant lié $\mathbf{K}_b$ se formera dans le plan x-y. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser le champ auxiliaire **H** qui obéit à la loi d'Ampère pour les courants libres, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$.

Assurez-vous que la version magnétique de la loi de Gauss $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ est satisfaite et que la relation $\vec{B} = \mu\vec{H} = (1+\chi_m)\mu_0\vec{H}$ s'applique. Le courant libre garde la même forme qu'en (a). Trouvez **B** et **H** dans les différentes régions en considérant que $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{B}(x,y,-z)$ tient toujours.

9. Soit une particule de masse *m* dans un puits de potentiel infini; les fonctions propres et les valeurs propres de l'énergie sont données par

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

où *a* est la largeur du puit.

(a) Quelle est la forme la plus générale de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ si l'énergie mesurée à t = 0 montre que la particule est, soit dans l'état fondamental, soit dans le premier état excité, avec la même probabilité?

(b) Utilisez la fonction d'onde de la partie (a) pour calculer $\langle x \rangle$ au temps t. Quelle est la valeur maximale de $\langle x \rangle$?

(c) Trouvez la fonction d'onde particulière $\psi(x,t)$ pour laquelle $\langle x \rangle$ est maximale à t = 0.

(d) Calculez la valeur moyenne de la quantité de mouvement $\langle p \rangle$ pour la fonction d'onde de la partie (c). Quelle est la valeur maximale de $\langle p \rangle$?

10. Le son produit par une corde de guitare pincée à t = 0 peut être modélisé par une oscillation amortie décrite par :

$$f(t) = 0, \quad t < 0,$$
$$f(t) = A\,e^{-at}\cos\omega_1 t, \quad t > 0.$$

(a) Trouvez la transformée de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$. Vous devriez trouver qu'elle est proportionnelle à

$$A\left[\frac{1}{a-i(\omega+\omega_1)}+\frac{1}{a-i(\omega-\omega_1)}\right].$$

(b) Si on entend une note musicale claire qui s'estompe graduellement, que peut-on en déduire des grandeurs relatives des paramètres ω_1 et a? Dans ce cas, on peut montrer qu'un des termes de $F(\omega)$ est petit pour tout $\omega > 0$. En négligeant ce terme, montrez que le spectre de fréquence de la guitare présente un pic unique, centré en ω_1, de largeur proportionnelle à *a*.

(c) On considère maintenant deux cordes identiques pincées en même temps, mais de fréquences légèrement différentes :

$$f(t) = 0, \quad t < 0,$$
$$f(t) = A\, e^{-at} \cos \omega_1 t + A\, e^{-at} \cos \omega_2 t, \quad t > 0.$$

En écoutant le son produit, on entend clairement un battement dont plusieurs pulsations sont audibles avant que le son ne s'estompe. Que peut-on déduire des grandeurs relatives des paramètres *a*, ω_{beat} et ω_1?

(d) À partir de vos réponses en (a) et (b), il devrait être facile d'écrire la transformée de la fonction définie en (c) et d'obtenir son spectre de fréquence. Dessinez le spectre. Le dessin doit respecter les grandeurs relatives des paramètres *a*, ω_{beat} et ω_1 trouvées en (c). *N'hésitez pas à faire les approximations nécessaires, en autant qu'elles soient compatibles avec ces grandeurs relatives.*

(e) Y a-t-il un pic dans le spectre de fréquence à la fréquence de battement? Sinon, « devrait-il » y en avoir un? Comment peut-on entendre un battement s'il n'y en a pas?

FIN DE L'EXAMEN