Examen de l'Association canadienne des physiciens et physiciennes

Instructions

Durée : trois heures

L'usage des calculatrices est permis.

Il y a dix questions au total.

La solution à chaque problème doit figurer sur un ensemble distinct de pages agrafées. Indiquez clairement sur la première page de chaque solution le numéro de la question, le nom du candidat et celui de son université.

Toutes les questions ont la même valeur. Vous n'êtes pas tenus de répondre à toutes ! Relaxez et attaquez-vous aux questions qui portent sur les matières qui vous sont les plus familières ou qui vous semblent les plus intéressantes.

Les solutions doivent être envoyées par les directeurs de département à :

Prof. Ian Affleck,
Dept. of Physics and Astronomy,
University of British Columbia,
Vancouver, B.C., V6T 1Z1.

Cette année, Ian Affleck a préparé l'examen avec l'assistance de Mona Berciu, Marcel Franz, Brett Gladman, David Jones, Joanna Karczmarek, Steve Plotkin, Bill Unruh, Mark Van Raamsdonk, Silke Weinfurtner et Fei Zhou. David Sénéchal de l'Université de Sherbrooke a procédé à la traduction française.

Problème 1

Trouvez la période des petites oscillations du pendule plan illustré à la Fig. 1. Le fil de suspension est fixé à un cadre circulaire fixe de rayon R au point P, et sa longueur totale est L ($\pi R < L < 2\pi R$). Supposez que la portion du fil qui n'est pas enroulée demeure rectiligne, comme illustré, et négligez le frottement.

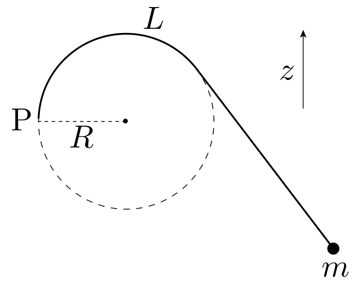

Fig. 1: pendule plan - z est la coordonnée verticale

Problème 2

Un bloc de section triangulaire à angle droit et de masse M peut glisser sans frottement sur le sol en même temps qu'un cylindre homogène de masse m et de rayon R roule sans glisser sur la pente du bloc, qui fait un angle α avec l'horizontale (voir figure). Supposez qu'initialement le bloc et le cylindre sont au repos et que le point de contact du bloc avec le cylindre est à une hauteur H au dessus du sol.

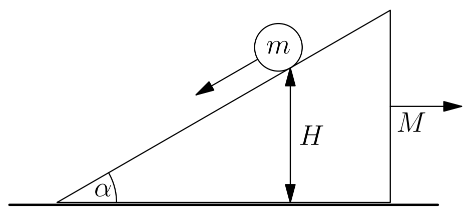

Fig. 2: Bloc et cylindre sur une surface sans frottement

a) Écrivez les équations du mouvement.

b) Quel temps prendra le cylindre pour atteindre le bas du plan incliné ?

Problème 3

Une particule interagit avec un champ scalaire qui affecte sa masse inertielle. Dans un référentiel inertiel particulier, ce champ scalaire est statique et par conséquent la masse au repos de la particule dépend de la coordonnée x comme $m(x) = m_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$. Au temps $t = 0$, la particule est au repos à $x = 0$. Subséquemment, la particule se déplace vers $x > 0$ à une vitesse non nulle. Calculez sa trajectoire $x(t)$, en utilisant la cinématique relativiste.

Problème 4

Des pièges optiques, constitués de faisceaux laser en interférence, sont utilisés pour capturer et confiner des atomes ultra-froids. Près du centre du piège, les lasers produisent une champ électrique effectif de la forme suivante :

$$\vec{E}(x) = E_0(1 - x^2/x_0^2)\hat{e}_z \tag{1}$$

où, typiquement, $E_0 = 5\ 000$ V/m, $x_0 = 5\mu$m et x est la distance à partir du centre du piège. Un atome de rubidium (^{87}Rb) se déplaçant dans la direction x à une vitesse de 0.1 mm/s se trouve à $x = 0$ quand le piège est allumé. Selon le tableau périodique, cet atome comporte 37 protons, 50 neutrons et un électron dans un niveau $5s$; le rayon atomique est d'environ 2.5Å.

a) En traitant l'atome comme un noyau ponctuel entouré d'une sphère neutralisante uniformément chargée, calculez sa polarisabilité (le moment dipolaire électrique divisé par le champ électrique).

b) Décrivez quantitativement le mouvement de cet atome une fois le piège en marche (trouvez les échelles de temps et de longueur qui caractérisent ce mouvement ; décrivez vos hypothèses).

c) Pour être capturé par le piège, quelle est la vitesse maximale que l'atome de rubidium peut avoir au moment où le piège est mis en marche ?

Problème 5
Considérez un faisceau lumineux d'une longueur d'onde de 530 nm à incidence normale sur un bloc de verre d'indice de réfraction 1.5.

a) Faites la conception d'une couche anti-reflet basée sur un diélectrique. Autrement dit, quels devraient être l'épaisseur d et l'indice de réfraction n_f d'une couche qui pourrait empêcher toute réflexion de la lumière vers la gauche ? Supposez que le bloc de verre est infiniment épais. Vous devez considérer les réflexions multiples aux deux interfaces (air-couche et couche-bloc). Vous pouvez supposer que tous les milieux sont sans pertes et non magnétiques.

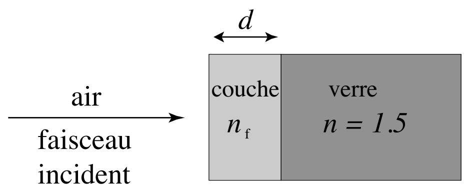

Fig. 3: couche anti-reflet

b) En vous basant sur votre réponse à la partie a), expliquez pourquoi les couches anti-reflet utilisées sur les lunettes ont une couleur pourpre quand on les regarde d'un angle non nul.

Problème 6
Un système quantique particulier peut être modélisé par le système de billes et de ressorts illustré, où m est la masse des billes et k la constante de rappel des ressorts et où le mouvement des billes est contraint à se produire le long de l'axe des x seulement.

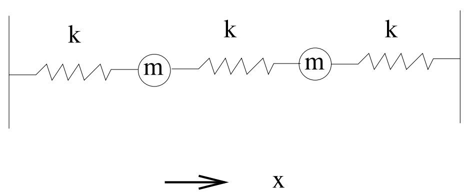

Fig. 4: Billes quantiques et ressorts. Les ressorts sont fixes aux extrémités.

a) Déterminez le spectre des valeurs propres de l'énergie de ce système, en supposant que l'énergie classique de la configuration à l'équilibre (illustrée) est nulle.

b) Soit l la distance entre les billes dans un état général et l_0 la valeur à l'équilibre de cette distance. Calculez la valeur moyenne de $(l - l_0)^2$ dans l'état fondamental. Supposez que l est la même pour tous les ressorts.

Problème 7
Une protéine peut être modélisée comme un repli particulier d'une globule de polymères (voir figure). Supposons que ce polymère est constitué de N résidus (ou billes) reliés par $N - 1$ liens. Il y a ν états d'orientation par lien.

a) Si le temps de réorientation entre différents états de lien est de 10^{-12}s, estimez le temps nécessaire pour que le polymère trouve sa configuration naturelle par une recherche aléatoire des configurations. Pour cette partie du problème, supposez que $\nu = 10$ et $N = 101$. Cette estimation est-elle raisonnable, autrement dit, est-ce une échelle de temps raisonnable pour le repliement d'une protéine ?

FIG. 5: Globule de polymère replié.

b) Dans la configuration repliée, supposons que chaque bille interagit avec z billes immédiatement voisines. Supposons en plus que l'énergie d'interaction entre deux billes voisines est distribuée au hasard en suivant la fonction de distribution illustrée.

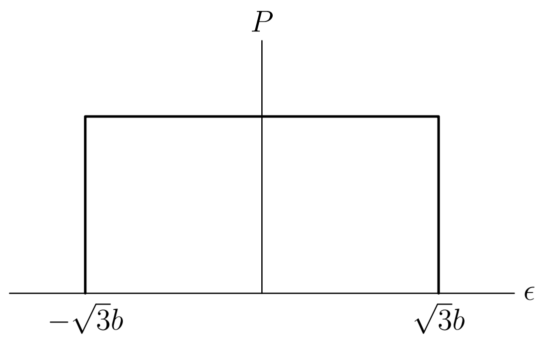

FIG. 6: Distribution de probabilité pour l'énergie ϵ

Dans la limite d'un très grand nombre de monomères en interaction, quelle est la probabilité (en fonction de N, b, z ou de toute autre variable) qu'une configuration particulière ait une énergie E ?

c) Trouvez l'énergie moyenne du système en fonction de la température T (vous pouvez négliger les corrections provenant de termes non extensifs).

d) Trouvez l'entropie en fonction de la température T (toujours en négligeant les corrections provenant de termes non extensifs) et montrez qu'il y a une température à laquelle le système manque d'entropie et par conséquent "gèle" dans un seul état. Quelle est cette température ? (Ce comportement n'est pas lié au repliement de la protéïne, mais est plutôt analogue à une transition vitreuse dans un système nanoscopique).

Problème 8

Tout cristal à l'état solide peut être considéré comme un réseau de Bravais de points (ou vecteurs), une base d'atomes étant associée à chacun de ces points. La maille de Wigner-Seitz d'un cristal est la maille élémentaire la plus symétrique possible. En déplaçant cette maille par chacun des vecteurs du réseau de Bravais, tout l'espace est occupé exactement une fois. Le réseau réciproque est un autre réseau de Bravais formé par tous les vecteurs $\vec{G}$ respectant la condition

$$e^{i\vec{G}\cdot\vec{R}} = 1 \tag{2}$$

pour tout vecteur $\vec{R}$ du réseau de Bravais original. La zone de Brillouin est la maille de Wigner-Seitz du réseau réciproque.

Quand un faisceau de rayons X est diffracté par un cristal, l'intensité du faisceau diffracté s'annule dans toutes les directions en raison d'une interférence destructive, sauf dans les directions correspondant à un changement $\Delta\vec{k}$ du vecteur d'onde du rayonnement qui coïncide avec l'un des vecteurs du réseau réciproque : $\Delta\vec{k} = \vec{G}$. Lorsque cette condition est réalisée, l'intensité de l'onde diffractée dans cette direction est proportionnelle au carré du facteur de structure $S_{\vec{G}}$, défini par

$$S_{\vec{G}} = \sum_a f_a e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}_a}. \tag{3}$$

où la somme est prise sur les positions $\vec{r}_a$ de tous les atomes dans une maille élémentaire du cristal, et où les f_a sont les facteurs de forme, soit les amplitudes de diffraction pour chaque atome pris séparément. (En général, f_a peut dépendre du changement de vecteur d'onde $\vec{G}$, mais nous allons négliger cette dépendance ici. Ceci est une approximation raisonnable pour les vecteurs réciproques $\vec{G}$ les plus petits.)

Considérez maintenant un cristal d'oxide de cuivre simplifié (voir figure). Sur chaque plan, les atomes de cuivre forment un réseau carré d'espacement a alors que les atome d'oxygène occupent les positions mitoyennes entre des atomes de cuivres voisins. Ces plans se répètent dans la direction z, espacés de c.

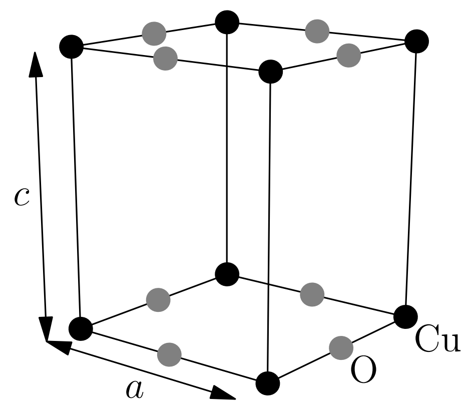

FIG. 7: Structure cristalline simplifiée du CuO.

a) Faites un schéma de la maille de Wigner-Seitz de ce cristal, projetée sur le plan xy, en indiquant la position des atomes. Quel est le volume de la maille de Wigner-Seitz ?

b) Donnez une expression pour les vecteurs $\vec{G}$ du réseau réciproque.

c) En supposant que les facteurs de forme atomiques sont f_{Cu} et f_{O} pour les atomes de cuivre et d'oxygène, calculez le facteur de structure $S_{\vec{G}}$.

d) En vous basant sur ces résultats, quels sont les rapports des intensités des pics observés en diffraction X ?

Problème 9

La planète naine Eris est à présent à 96,7 unités astronomiques ($= 1,45 \times 10^{13}$ m) du soleil, soit trois fois plus loin que Neptune. La Terre, à une distance de 1 unité astronomique du soleil, reçoit de celui-ci 1 340 W/m^2 de rayonnement électromagnétique. Eris est très froide du fait de son éloignement du soleil, mais son rayonnement du corps noir a été mesuré par le téléscope IRAM (Espagne). Ce rayonnement est de 1,3 mJy à une fréquence de 250 GHz (Note : 1 mJy (millijanski) correspond à 10^{-29} Watts per m^2 par Hz).

a) Supposez qu'Eris est en rotation suffisamment rapide pour que la température de sa surface soit uniforme et qu'elle réfléchit la moitié de la lumière incidente vers l'espace. Estimez son rayon.

b) Eris possède un satellite appelé Dysnomia, dont l'orbite, compatible avec une forme circulaire, a une période de 15,77 jours ($1,363 \times 10^6$ s). À son point le plus large projeté selon notre ligne de visée, l'orbite de Dysnomia sous-tend un angle de $1,06''$ à une distance de 97 unités astronomiques. Calculez la densité d'Eris et comparez-la à celle de l'eau. (si vous n'avez pas pu résoudre la partie a), vous pouvez toujours essayer la partie b) en supposant que le rayon d'Eris est le même que celui de Pluton, soit $1,165 \times 10^6$ m.

Problème 10
Dans ce problème nous allons étudier la propagation de la lumière dans un faible champ gravitationnel et calculer un "indice de réfraction effectif" du champ gravitationnel. Nous allons adopter un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière dans l'espace plat est $c = 1$. Dans un champ gravitationnel faible, la métrique peut s'écrire comme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique diagonal avec éléments (-1,1,1,1) pour $\mu = 0$, 1, 2 et 3 respectivement, et $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Nous utiliserons ici les coordonnées harmoniques habituelles $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$.

a) En partant de l'élément d'intervalle pour un faisceau lumineux se propageant dans l'espace courbe :

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu(\lambda) dx^\nu(\lambda) = 0 \tag{5}$$

le long d'une courbe paramétrisée par $\lambda = t$, exprimez la norme de la vitesse $d\vec{x}/dt$ de la lumière en fonction de $h_{\mu\nu}$ et de la direction de la propagation de la lumière, définie par le 3-vecteur unitaire $\hat{k}_i$. On suppose que le champ gravitationnel est statique et que $h_{it} = h_{ti} = 0$ (les indices grecs répétés sont sommés de 0 à 3).

b) En utilisant le résultat précédent et en supposant toujours que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, écrivez l'indice de réfraction de la lumière se propageant dans la direction $\hat{k}$, sous la forme $n(\hat{k}) = n_{ij}\hat{k}^i\hat{k}^j + \mathcal{O}(h_{ij}^2)$ et trouvez le 3-tenseur n_{ij}. (Les indices latins répétés sont sommés de 1 à 3. L'indice de réfraction est défini comme c/v, où c est la vitesse de la lumière dans l'espace plat et v sa vitesse dans un champ gravitationnel).

c) À partir de la solution de Schwarzschild, à une distance $r \equiv \sum_{i=1}^{3} x_i x_i$ d'un objet sphérique de masse M et où r est grand par rapport au rayon de Schwarzschild, on peut montrer que

$$h_{ij} = \delta_{ij} h_{tt} = \delta_{ij} 2GM/r. \tag{6}$$

Calculez l'indice de réfraction en fonction de la direction de propagation $\hat{k}$ pour un faisceau se propageant juste au-dessus de la surface du soleil, comme observé, par exemple, lors d'une éclipse de soleil.

Constantes and formules

Constante de Coulomb : $1/(4\pi\epsilon_0) = 8,988 \times 10^9$ N m^2/C^2

Masse du proton : $M_P = 1,673 \times 10^{-27}$ Kg

Constante de Planck : $h = 6,626 \times 10^{-34}$J s

Vitesse de la lumière : $c = 2,998 \times 10^8$m/s

Constante de Boltzmann : $k = 1,381 \times 10^{-23}$J/K

Équation de Fresnel pour la réflexion à incidence normale : l'amplitude réfléchie par une interface entre deux milieux diélectriques non magnétique sans pertes, avec indices de réfraction n_1 et n_2 respectivement, est

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \tag{7}$$

L'amplitude de réflexion r est définie de sorte que les champs électriques incident et réfléchi sont

$$\vec{E}_i(x,t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - ikx} \tag{8}$$
$$\vec{E}_r(x,t) = -r\vec{E}_0 e^{i\omega t + ikx} \tag{9}$$

Constante de gravitation : $G = 6,673 \times 10^{-11}$m^3/(kg s^2)

Puissance rayonnée par unité de surface, de fréquence et d'angle solide par un corps noir à température absolue T :

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{10}$$

Puissance totale par unité de surface (intégrale de B sur les fréquences et sur l'angle solide) : $P/A = \sigma T^4$ où la constante de Stefan-Boltzman, σ, est :

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{h^3c^2} = 5,67 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}. \tag{11}$$

L'Unité astronomique : 1 UA = 1,496$\times$ 10^{11} m

Masse du soleil : $M_S = 1,98892 \times 10^{30}$ kg

Rayon du soleil : $R_S = 6,960 \times 10^8$ m