Examen universitaire de l'ACP (2013)

Préparé par : Department of Physics & Engineering Physics, University of Saskatchewan

(version française : D. Sénéchal, U. de Sherbrooke)

mardi, 5 février 2013 Durée : 3 heures.

Nom : ____________________ Prénom : ____________________

Institution : ________________________

Instructions :

1. La durée de l'examen est de trois heures.
2. Les calculatrices scientifiques sont permises, mais pas les manuels ou les ouvrages de référence.
3. Il y a 10 questions, d'égales valeurs. On ne s'attend pas à ce que vous puissiez les compléter toutes ; planifiez donc votre temps sagement.
4. Inscrivez vos solutions sur le questionnaire, en utilisant le verso si nécessaire.
5. Ce questionnaire comporte 23 pages.

Constantes physiques :

- unité de masse atomique : $u = 1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.5\ \mathrm{MeV/c^2}$
- constante de Boltzmann : $k_B = 1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = 8.617 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$
- constante de Coulomb : $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.988 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$
- masse de l'électron : $9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 5.110 \times 10^{-1}\,\mathrm{MeV/c^2}$
- masse du proton : $1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 938.2\ \mathrm{MeV}/c^2$
- longueur d'onde de Compton pour l'électron $\frac{h}{mc} = 2.426 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$
- électron-volt : $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
- charge élémentaire : $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$
- perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Hm^{-1}}$
- constante de Planck : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} = 6.586 \times 10^{-16}\ \mathrm{eV \cdot s}$
  $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$
  $hc = 1.986 \times 10^{-16}\ \mathrm{J \cdot nm} = 1.240\ \mathrm{keV \cdot nm}$
- constante gravitationnelle : $G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
- vitesse de la lumière : $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
- rayon du Soleil : $R_\odot = 6.950 \times 10^{5}\ \mathrm{km}$
- distance minimale Terre-Soleil (périhélie) : $r_p = 1.471 \times 10^{8}\ \mathrm{km}$

Problème 1 : mécanique et gravité

Une planète en rotation affecte la forme d'un ellipsoïde aplati dont le rayon équatorial a excède le rayon polaire b. L'aplatissement $\epsilon = 1 - b/a$ est une mesure de cette différence. L'aplatissement a un effet sur le champ gravitationnel produit par la planète. Afin de déterminer cet effet, on peut remplacer l'ellipsoïde de volume V par une sphère de rayon R ayant le même volume. Le champ gravitationnel de la planète est alors composé de deux termes : (1) le champ produit par une sphère de rayon R et (2) celui produit par une densité surfacique (masse par unité de surface) et qui doit être ajouté au champ d'une sphère pour produire le champ d'un ellipsoïde aplati. Trouvez la densité surfacique au premier ordre dans l'aplatissement ϵ et exprimez le résultat en fonction du rayon équatorial a, de l'aplatissement ϵ, de la densité volumique uniforme ρ_0 de la planète, et de la latitude θ.

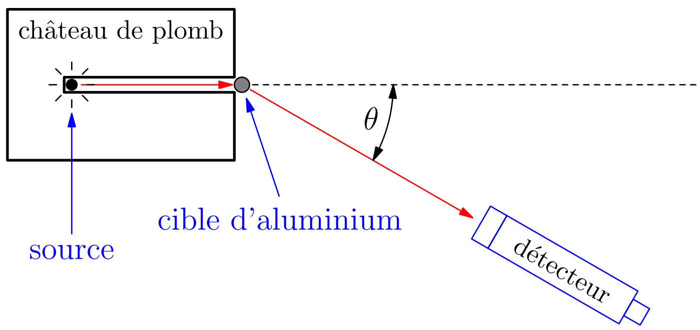
Indice : Trouvez la distance entre un point sur la surface de la planète aplatie et son centre, en fonction de la latitude.

Problème 2 : Électromagnétisme

Une sphère de rayon R porte une polarisation électrique uniforme et constante $\mathbf{P}$. Trouvez le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère et exprimez-le en fonction de $\mathbf{P}$, de R, de la permittivité du vide et des coordonnées appropriées.

Problème 3 : Physique expérimentale

L'expérience de diffusion Compton est menée à l'aide d'une source de rayons gamma mono-énergétiques et d'une cible en aluminium. L'énergie E' des rayons gamma diffusés par la cible est mesurée en fonction de l'angle de diffusion θ, à l'aide d'un scintillateur, d'un photomultiplicateur et d'un analyseur multicanaux.



(a) Obtenez l'expression de l'énergie E' des rayons diffusés en fonction de l'énergie E des rayons incidents, de l'énergie au repos E_0 des électrons et de l'angle de diffusion θ.

(b) Les données suivantes sont obtenues :

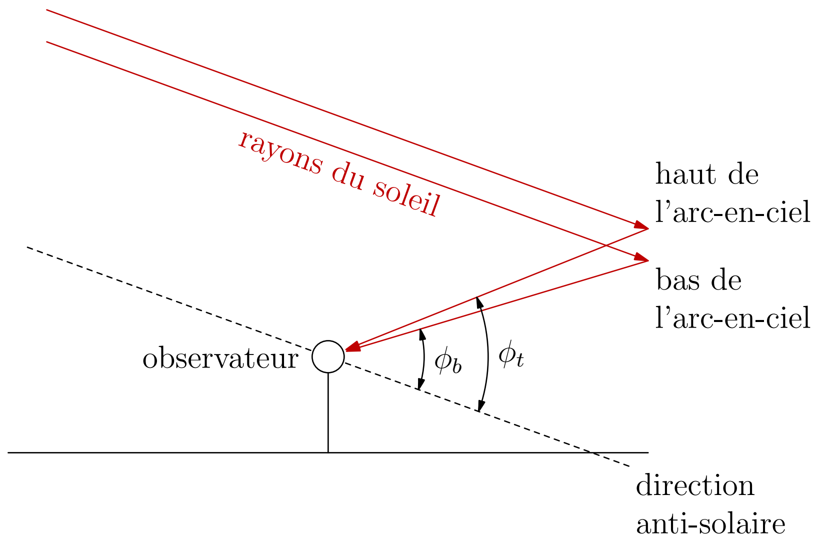
angle θ (degrés)	énergie E' (MeV)
41.4	0.500
60.0	0.402
75.5	0.336
90.0	0.288

En n'utilisant que ces données, calculez l'énergie E des rayons gamma incidents et l'énergie au repos E_0 des électrons.

Problème 4 : Optique

Par rapport à la direction anti-solaire (partant du soleil et passant par l'observateur), calculez l'intervalle angulaire dans lequel apparaît l'arc-en-ciel primaire. L'indice de réfraction de l'eau pour la lumière rouge est 1,330, alors qu'il est 1,343 pour la lumière violette. On peut supposer que l'indice de réfraction de l'air est 1.

Indice : considérez un rayon lumineux pénétrant la partie supérieure d'une gouttelette d'eau sphérique.



Problème 5 : Mécanique quantique

Un électron se déplaçant sur une surface ressent un potentiel bi-dimensionnel

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 + Ax^4, \tag{1}$$

où $\omega_2 > \omega_1 > 0$, $A > 0$. Nous supposons que le rapport ω_1/ω_2 est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut être écrit sous la forme d'un rapport d'entiers.

(a) Trouvez un hamiltonien approximatif H_0 pour lequel les états liés et les énergies associées peuvent être obtenus exactement. Écrivez une expression pour ces états et ces énergies propres. Si vous ne pouvez vous en rappeler, décrivez en vos termes ce dont vous vous souvenez à propos de ces états et de ces énergies.

(b) De combien le terme en x^4 dans l'expression (**??**) déplace-t-il les niveaux d'énergie de la partie (a) au premier ordre en A ? Dans cette partie et la suivante, si vous n'êtes pas en mesure de résoudre le problème, expliquez du moins comment s'y prendre.

(c) Comment le terme en x^4 dans l'expression (**??**) affecte-t-il les états non perturbés au premier ordre en A ?

(d) Supposons en outre que l'électron est soumis à un champ électrique dépendant du temps :

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-|t|/\tau)$$

dans la direction x. $\mathcal{E}$ et τ sont des constantes. Quelle est la probabilité de transition entre les deux plus bas niveaux d'énergie du hamiltonien H_0 de la partie (a), au premier ordre ?

Problème 6 : Relativité restreinte

Un photon est émis par une source se déplaçant le long d'un cercle à vitesse constante ; il est ensuite absorbé par un détecteur se déplaçant sur le même cercle, à la même vitesse. Calculez le rapport entre l'énergie du photon absorbé et celle du photon émis telle que mesurée dans le référentiel instantané de la source.
Indice : il peut être utile de se rappeler que la quadri-vitesse est définie par $u = (\gamma c; \gamma \mathbf{v})$ et la quadri-impulsion par $p = (E/c; \mathbf{p})$. De ces expressions, démontrez, avec la convention que $u \cdot u = c^2$, que l'énergie d'un photon de quadri-impulsion p mesurée par un observateur ayant une quadri-vitesse u est $E = p \cdot u$.

Problème 7 : Physique statistique et chaleur

Ne répondez qu'à la partie **(a)** ou la partie **(b)**

(a) Soit un gaz de N électrons indépendants dans un champ magnétique uniforme. En raison de l'interaction entre le moment magnétique associé au spin de l'électron et le champ, l'énergie d'une particule ϵ est déplacée de $\pm\mu_B B$ pour les spins up et down, respectivement (μ_B est le magnéton de Bohr). Supposez que le champ n'affecte que le spin et non le mouvement orbital des électrons. Montrez que la susceptibilité magnétique de spin χ à une température quelconque est

$$\chi = 2\mu_B^2 \int \mathrm{d}\epsilon \, \frac{\mathrm{d}D(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} f(\epsilon) \, , \tag{2}$$

où $D(\epsilon)$ est la densité des états orbitaux et $f(\epsilon)$ est la distribution de Fermi-Dirac :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/\tau} + 1} \, , \tag{3}$$

à une temperature τ/k_B et un potentiel chimique μ. Exprimez χ en fonction de N et de τ dans la limite de grande température ($\tau \to \infty$), en supposant que l'énergie à une particule la plus basse est nulle et que $D(0) = 0$.

(b) Soit un gaz de N électrons libres (masse m) confinés dans une boîte cubique de côté L (volume $V = L^3$) dans la limite ultra-relativiste. L'énergie à une particule dans cette limite peut être approximativement exprimée comme $\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \approx pc$. L'impulsion $\mathbf{p}$ est quantifiée ainsi :

$$\mathbf{p} = \frac{\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_z) \, ; \quad n_{x,y,z} = 1, 2, 3, \cdots . \tag{4}$$

Supposons que le système est dans la limite macroscopique ($L \to \infty$), à température nulle. Pour que la limite ultra-relativiste soit valable, la condition $p_F c \geq mc^2$ doit être respectée ; (i) exprimez cette condition en fonction de la densité $n = N/V$; (ii) exprimez l'énergie interne U en fonction de N et de l'impulsion de Fermi p_F ; (iii) exprimez la pression P en fonction de U et de V.

Problème 8 : Physique des particules et mécanique quantique

Les oscillations de neutrinos proviennent d'un désaccord entre les états de neutrinos créés par les interactions faibles et les états propres de la masse. Dans un modèle comportant deux espèces de neutrinos, les états propres de l'interaction $|\nu_e\rangle$ et $|\nu_\tau\rangle$ sont reliés ainsi aux états propres de la masse $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \tag{5}$$

où $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ correspondent respectivement aux masses m_1 and m_2. Un processus d'interaction faible produit un neutrino électronique $|\nu_e\rangle$ d'impulsion $\mathbf{p}$ au temps $t = 0$. Quelle est la probabilité de détecter un neutrino de type tau $|\nu_\tau\rangle$ au temps t ? Supposez que les masses des neutrinos sont petites : $mc^2 \ll |\mathbf{p}|c$. D'après votre résultat, que peut-on conclure à propos du spectre de masse des neutrinos à partir des oscillations de neutrinos ?

Problème 9 : Physique de la matière condensée

Dans certains métaux, on peut modéliser les électrons de conduction comme un gaz d'électrons presque libres, de masse m, se déplaçant dans un faible potentiel périodique $V(\mathbf{r})$ créé par le réseau cristallin. La fonction d'onde à un électron, pour un vecteur d'onde donné $\mathbf{k}$, peut être exprimée sous la forme d'une série de Fourier :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}}\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{K})\cdot\mathbf{r}}\,, \tag{6}$$

où les $\mathbf{K}$ sont les vecteurs du réseau réciproque.

(a) Montrez que $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ respecte le théorème de Bloch. Exprimez aussi $V(\mathbf{r})$ en fonction de sa transformée de Fourier.

(b) En substituant l'expression ci-dessus de la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger, obtenez l'équation de Schrödinger dans l'espace réciproque :

$$\left[E - \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}-\mathbf{K})^2\right] C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} = \sum_{\mathbf{K}'} V_{\mathbf{K}'-\mathbf{K}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}'}\,, \tag{7}$$

où $V_{\mathbf{K}'-\mathbf{K}}$ est la transformée de Fourier de $V(\mathbf{r})$ au vecteur d'onde $\mathbf{K}'-\mathbf{K}$.

(c) Soit un réseau carré (dimension 2) avec paramètre de maille a. La première zone de Brillouin peut être définie par l'intervalle $k_x = [0, 2\pi/a]$ et $k_y = [0, 2\pi/a]$. Quelle est la dégénérescence au point $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a)$ dans le système non perturbé ?

(d) Les vecteurs du réseau réciproque sont $\mathbf{K}_{00} \equiv (0,0)$, $\mathbf{K}_{10} \equiv (1,0)$, $\mathbf{K}_{01} \equiv (0,1)$, et $\mathbf{K}_{11} \equiv (1,1)$, en unités de $2\pi/a$. Donc les valeurs possibles de $\mathbf{K}'-\mathbf{K}$ sont $(0,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, et $(\pm1,\pm1)$. Expliquez comment il n'y a que trois valeurs distinctes de $V_{\mathbf{K}'-\mathbf{K}}$ et notez-les V_{00}, V_{10}, et V_{11}. En utilisant la notation

$$E_{ij} = \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}-\mathbf{K}_{ij})^2\,, \quad C_{ij} = C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}_{ij}}\,; \quad i,j = 0,1, \tag{8}$$

et $V_{(0,0)} \equiv V_{00} = 0$, récrivez l'éq. (**??**) sous forme matricielle.

(e) Trouvez les énergies propres à $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a)$ pour $V_{10} = 0$ et $V_{11} \neq 0$. Qu'advient-il de la dégénérescence à ce vecteur d'onde ?

Problème 10 : Physique appliquée

On cherche à construire un dispositif qui déclenche une alarme anti-intrusion. Afin d'assurer sa discrétion, on utilisera un rayon ultraviolet de longueur d'onde $\lambda = 375\,\text{nm}$, produit par une diode laser UV standard. La photocathode est faite de K_2CsSb, dont l'efficacité quantique est

$$QE = \frac{\text{photoélectrons émis}}{\text{photons incidents}} = 0.30.$$

Le rayon passe devant l'entrée du local, aboutit à la photocathode et génère un courant. l'interruption de ce courant par un obstacle (l'intru) déclenche l'alarme. La plus grande source de bruit de fond lumineux est la lumière du jour. Le spectre d'émission thermique à la surface du soleil est (puissance par unité de surface et par unité de longueur d'onde)

$$e(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

avec une température de surface $T = 5780\text{K}$.

(a) L'interruption du photocourant signifie en pratique sa baisse au dessous d'un seuil I_{min}. Par contre, les sources de bruit de fond comportant une composante UV causent un "courant sombre" qui demeure même si la source laser est interrompue. Pour contourner cet effet, on conçoit la photocathode afin qu'elle n'admette que les longueurs d'ondes situées entre 374 nm et 376 nm, et on donne à la photocathode une ouverture de $1,50\,\text{mm}$. De plus, on adopte une valeur prudente de I_{min} qui est dix fois plus grande que le courant sombre généré par la lumière du jour.
Quel seuil I_{min} doit-on choisir ?

(b) On ne peut pas faire fonctionner le dispositif exactement à la valeur $I = I_{min}$, car alors la moindre fluctuation dans la puissance de la diode laser déclencherait l'alarme. Il faut plutôt l'utiliser à $I = 2I_{min}$. D'un autre côté, pour des raisons de sécurité, on cherche à limiter la puissance du faisceau laser à moins de $10^{-2}\,\text{W/cm}^2$. En supposant que le faisceau laser a un diamètre de $1,00$ mm, le dispositif peut-il être fonctionnel dans ces conditions ?