Association canadienne des physiciens et physiciennes
APPUI À L'ENSEIGNEMENT ET À LA RECHERCHE EN PHYSIQUE AU CANADA

UNIVERSITY OF MANITOBA

Prix Lloyd G. Elliott, Examen universitaire (2015)

Préparé par : Department of Physics & Engineering Physics, University of Manitoba
(version française : D. Sénéchal, U. de Sherbrooke)

mardi, 3 février 2015 Durée : 3 heures.

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Institution : ______________________________

Instructions :

1. La durée de l'examen est de trois heures.
2. Les calculatrices scientifiques sont permises, mais pas les manuels ou les ouvrages de référence.
3. Il y a 10 questions, d'égales valeurs. On ne s'attend pas à ce que vous puissiez les compléter toutes ; planifiez donc votre temps sagement.
4. Inscrivez vos solutions sur le questionnaire, en utilisant le verso si nécessaire.

Constantes physiques :

— unité de masse atomique : $u = 1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.5\ \mathrm{MeV/c^2}$
— constante de Boltzmann : $k_B = 1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = 8.617 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$
— constante de Coulomb : $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.988 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$
— masse de l'électron : $9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 5.110 \times 10^{-1}\,\mathrm{MeV/c^2}$
— masse du proton : $1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938.2\,\mathrm{MeV}/c^2$
— longueur d'onde de Compton pour l'électron $\frac{h}{mc} = 2.426 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$
— électron-volt : $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
— charge élémentaire : $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
— permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$
— perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Hm^{-1}}$
— constante de Planck : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 6.586 \times 10^{-16}\ \mathrm{eV \cdot s}$
$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$
$hc = 1.986 \times 10^{-16}\ \mathrm{J \cdot nm} = 1.240\ \mathrm{keV \cdot nm}$
— constante gravitationnelle : $G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
— vitesse de la lumière : $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
— rayon du Soleil : $R_\odot = 6.950 \times 10^{5}\ \mathrm{km}$
— distance minimale Terre-Soleil (périhélie) : $r_p = 1.471 \times 10^{8}\ \mathrm{km}$

Problème 1 : mécanique classique

Un yoyo est constitué de deux disques de masse M et de rayon R, reliés par un essieu de masse m et de rayon r. Une corde de masse négligeable est enroulée autour de l'essieu. Les deux disques, ainsi que l'essieu, ont une distribution de masse uniforme. Le moment d'inertie de chaque disque est $I_d = \frac{1}{2}MR^2$ alors que celui de l'essieu est $I_e = \frac{1}{2}mr^2$.

(a) L'extrémité de la corde est maintenue à hauteur constante dans le champ gravitationnel de la Terre, initialement à la verticale. Trouvez le mouvement subséquent du centre de masse du yoyo.

(b) Le yoyo est ensuite transporté dans l'espace, où le champ gravitationnel est négligeable, et une force F est appliquée sur l'extrémité de la corde. Décrivez le mouvement du centre de masse du yoyo, la rotation du yoyo et le mouvement de l'extrémité de la corde.

Problème 2 : mécanique quantique (question 1) :

Considérez un espace des états de dimension 2 engendré par les vecteurs de base suivants :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Supposons en outre que le système physique d'intérêt soit décrit par le hamiltonien suivant :

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

où g et h sont des constantes réelles et positives.

(a) Diagonalisez le hamiltonien H : trouvez les vecteurs propres et les valeurs propres associées ϵ_+ et ϵ_-, où $\epsilon_+ > \epsilon_-$.

(b) Si l'état du système au temps $t = 0$ est l'état $|1\rangle$, montrez que le système au temps t est décrit par le vecteur d'état suivant :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i\sin(gt/\hbar) \end{pmatrix}$$

(c) Quelle est la probabilité qu'une mesure de l'énergie du système dans l'état $|\Psi(t)\rangle$ au temps $t = t_0$ produise la valeur ϵ_- ? Ayant obtenu la valeur ϵ_- à $t = t_0$, la mesure est répétée au temps $t = t_0 + \Delta t$. Quelle est la probabilité que l'autre énergie propre, ϵ_+, soit alors obtenue ?

Problème 3 : mécanique quantique (question 2) :

Un atome d'hydrogène est soumis à un champ électrique variable donné par

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \hat{z}\, E_0 e^{-\gamma t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Quelle est la probabilité, au premier ordre que, dans la limite $t \to \infty$, l'atome ait transité de l'état fondamental vers l'état $2p$? Les fonctions d'onde normalisées $\Psi_{n,l,m}$ de l'atome d'hydrogène sont données par

$$\begin{aligned}
\Psi_{1,0,0}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_o^3}}\, e^{-r/a_o} \\
\Psi_{2,1,1}(r,\theta,\phi) &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi\, a_o^5}}\, r\, e^{-r/2a_o}\, \sin\theta\, e^{i\phi} \\
\Psi_{2,1,0}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi\, a_o^5}}\, r\, e^{-r/2a_o}\, \cos\theta \\
\Psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi\, a_o^5}}\, r\, e^{-r/2a_o}\, \sin\theta\, e^{-i\phi}
\end{aligned}$$

où a_o est le rayon de Bohr.

Problème 4 : mécanique statistique

Bosons en dimension 1
Considérons des bosons sur un réseau unidimensionnel avec relation de dispersion $\varepsilon_k = \Delta + \frac{k^2}{2m}$. Dans ce problème nous posons $\hbar = k_B = 1$. Δ est une énergie d'excitation et m est la masse des bosons. Les vecteurs d'onde permis sont $k = \frac{2\pi}{Ma}n$, $n = 0, \cdots, M-1$ où M est le nombre d'états sur le réseau et a est la taille de la maille élémentaire.

(a) Obtenez l'expression du potentiel grand canonique par site :

$$\Omega = -\frac{T}{M} \ln Z_g \qquad \text{où} \qquad Z_g = \mathrm{Tr}\, \exp[-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T]$$

à température T, dans le cas particulier d'un potentiel chimique nul, $\mu = 0$. On note $\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k \hat{n}_k$, où $\hat{n}_k$ est l'opérateur du nombre d'occupation, et $\hat{N} = \sum_k \hat{n}_k$.

(b) Simplifiez l'expression du grand potentiel Ω dans la limite $M \to \infty$ et $T \ll \Delta$. En vous basant sur cette expression simplifiée, montrez que la chaleur spécifique $c(T) = -T\partial^2\Omega/\partial T^2$ se comporte comme $c(T) \sim T^{-3/2} \exp(-\Delta/T)$ aux basses températures.

Problème 5 : physique de l'état solide

La structure cristalline du germanium comporte deux atomes par maille élémentaire. La relation de dispersion des phonons comporte donc trois branches acoustiques et trois branches optiques.

(a) Faites un schéma de la relation de dispersion des phonons pour des ondes se propageant dans une direction typique. Faites attention au comportement attendu à $k = 0$ et à la frontière de la zone de Brillouin. Indiquez les branches optiques et acoustiques.

(b) Expliquez qualitativement pourquoi les modes acoustiques contribuent davantage à la chaleur spécifique à basse température que les modes optiques.

(c) Les modes de phonons peuvent être traités comme des oscillateurs harmoniques indépendants, chacun avec une fréquence $\omega_\lambda(\mathbf{k})$. À l'aide de la mécanique statistique, montrez que le nombre d'occupation à l'équilibre des phonons dans le mode λ de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est

$$\langle n_\lambda(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega_\lambda(\mathbf{k})} - 1}$$

(d) Dans le modèle de Debye, la relation de dispersion est modélisée par une fonction linéaire : $\omega(\mathbf{k}) = vk$. Dans le modèle d'Einstein, elle est plutôt modélisée par une constante : $\omega(\mathbf{k}) = \omega_E$. Décrivez comment et pourquoi une combinaison de ces modèles peut être utilisée pour décrire de manière approchée les relations de dispersion dans le germanium. Quelles limites doivent être imposées à k and ω dans cette description approchée ?

(e) Utilisez le modèle approché de la partie (d) afin d'obtenir l'expression suivante de la chaleur spécifique du germanium aux basses températures :

$$C_V = 3Nk_B\left[\frac{4\pi^4}{5}\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 + \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)^2 \mathrm{e}^{-\hbar\omega_E/k_B T}\right]$$

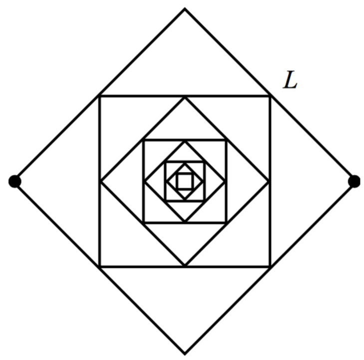
où N est le nombre de mailles élémentaires dans l'échantillon et $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ est la température de Debye, ω_D étant la fréquence acoustique maximale dans ce modèle. Dessinez un graphique approximatif de $C_V(T)$ et commentez le profil de cette courbe en relation avec votre réponse à la partie (b). Qu'est-ce que "température" signifie dans ce contexte ?

Note : la formule suivante sera utile

$$\int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}\,dx = \frac{4}{15}\pi^4$$

Problème 6 : électromagnétisme (question 1)

Le circuit électrique illustré est constitué d'un nombre infini de carrés faits d'un fil identique. Le côté du plus grand des carrés est L et chacun de ses côtés a une résistance R. Chaque carré successif relie les centres des côtés du carré précédent. Quelle est la résistance électrique entre les coins opposés du plus grand carré ?



Problème 7 : électromagnétisme (question 2)

Un long cylindre diélectrique de section circulaire de rayon R comporte une polarisation permanente telle que le vecteur de polarisation **P** pointe partout dans la direction radiale extérieure (perpendiculaire à l'axe du cylindre) avec une grandeur proportionnelle à la distance par rapport à l'axe : $\mathbf{P} = P_0\boldsymbol{\rho}$ où P_0 est une constante positive et $\boldsymbol{\rho}$ est le rayon vecteur dans le système de coordonnées cylindriques. Montrez que le travail qui doit être fourni afin de mettre ce cylindre en rotation à une vitesse angulaire ω est $W = (1/6)\pi\mu_0 P_0^2\omega^2 R^6$. Négligez l'effet des extrémités et supposez que la rotation n'a pas d'effet sur la polarisation **P**. Traitez le problème dans la limite non relativiste $\omega R \ll c$. Indice : considérez l'énergie emmagasinée dans le champ électromagnétique.

Problème 8 : physique subatomique

La sonde Philae s'est accrochée à la surface de la comète 67P/Churyumov Gerasimenko le 12 novembre 2014. Malheureusement, ses panneaux solaires ont été en bonne partie cachés par une falaise. Les concepteurs de la sonde auraient pu, au lieu de panneaux solaires, utiliser un générateur thermoélectrique à radio-isotope (GTR). Dans un GTR, une pastille de ^{238}Pu produit de la chaleur par désintégration alpha, et cette chaleur est convertie en énergie électrique à l'aide de thermocouples.

Si la sonde a besoin de 32W de puissance électrique, combien de kilogrammes de ^{238}Pu auraient dû être chargés dans le GTR au moment du décollage (2 mars 2004) ? La demi-vie du ^{238}Pu est de 87,7 années ; l'énergie dégagée par chaque désintégration alpha est de 5,593 MeV, le nombre d'Avogadro est $6,022 \times 10^{23}$ et l'efficacité des thermocouples est de 5%.

Problème 9 : astrophysique

Stabilité des cylindres graves. Les astrophysiciens ont étudié depuis longtemps le problème de la stabilité de nuages sphériques dont l'effondrement causé par la gravité est empêché par la pression interne. Le problème correspondant pour des nuages cylindriques se pose, car de telles structures apparaissent dans les régions où les étoiles se forment. Le problème qui suit se résout simplement à l'aide de l'équation d'équilibre hydrostatique, de l'équation d'état d'un gaz isotherme et de la théorie de la gravitation de Newton.

Considérons un cylindre infiniment long, dont la masse par unité de longueur est m, distribuée radialement suivant une densité volumique $\rho(r)$ qui résulte de l'équilibre entre la force gravitationnelle et la pression, de sorte que

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r),$$

où $g(r)$ est la grandeur de l'accélération gravitationnelle au rayon r. Le gaz est isotherme, de sorte que la pression est $P(r) = \sigma^2\rho(r)$, où σ est une constante. Le cylindre est borné à un rayon fini r_S, où la pression $P(r_S)$ devient égale à la pression constante P_S du milieu environnant.

(a) L'équation de Poisson pour la gravité est $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, où Φ est le potentiel gravitationnel et G la constante de gravitation. Utilisez l'équation de Poisson pour obtenir une expression de $g(r)$.

(b) Sans supposer une distribution $\rho(r)$ précise, montrez que l'équation suivante doit être satisfaite :

$$2\left(\langle P\rangle - P_S\right)A_S = m^2 G,$$

où $A(r) = \pi r^2$ est l'aire de la section à l'intérieur d'un rayon r, $A_S = A(r_S)$, et $\langle P\rangle$ est la pression moyennée sur le volume au sein du cylindre, définie par $\langle P\rangle = A_S^{-1}\int_0^{A_S} P(r)dA$. Notez que la moyenne sur la section est la même que la moyenne sur le volume car le cylindre est infini.

(c) Démontrez qu'il y a une limite supérieure $m_{\max}$ à la masse par unité de longueur, telle que $m \leq m_{\max}$ pour tous les cylindres isothermes en équilibre. Obtenez une expression de $m_{\max}$.

(d) Supposez que la masse par unité de longueur est $m = \alpha m_{\max}$, où $0 < \alpha < 1$. Montrez que l'équation suivante est satisfaite :

$$P_S = \alpha(1-\alpha)\frac{m_{\max}^2 G}{2A_S}.$$

(e) Un tel cylindre peut-il subir un effondrement gravitationnel s'il est compressé en augmentant P_S ? Expliquez votre raisonnement.

Problème 10 : physique médicale/nucléaire

Une sphère d'eau de 20g contient 3700 MBq d'iode-131.

(a) Utilisez l'information fournie ci-dessous pour évaluer, aussi précisément que possible, la dose absorbée par la sphère en joules par kg (« gray » ou Gy, qui est l'unité SI de la dose absorbée). Énoncez clairement les approximations nécessaires.

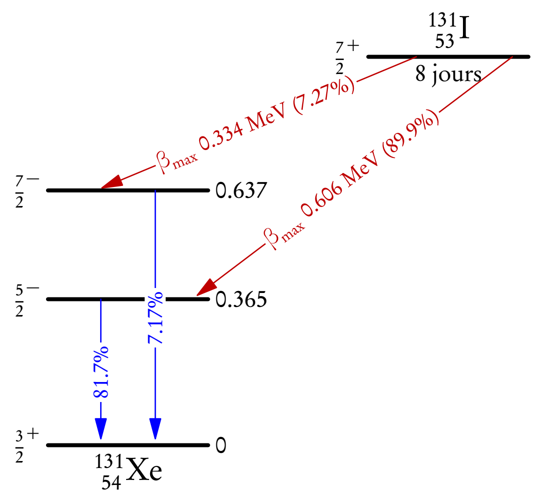
(b) Discutez de la précision attendue de vos résultats.

Notes :
1 becquerel (Bq) (unité SI de l'activité) $= 1$ désintégration par seconde.
1 electron volt (eV) $= 1,60218 \times 10^{-19}$ joules
Densité de l'eau $= 1$ g/cm^3
La longueur R_{CSDA}, obtenue en supposant que la particule est ralentie uniformément et de manière continue, est

$$R_{\mathrm{CSDA}}(E) = \int_0^E \frac{dE'}{S(E')}$$

où E is l'énergie et S le pouvoir d'arrêt.

Énergie cinétique de l'électron (MeV)	Pouvoir d'arrêt dans l'eau (MeV cm^2/g)	R_{CSDA} (g/cm^2)
3.00E-01	2.36E+00	8.42E-02
3.50E-01	2.24E+00	1.06E-01
4.00E-01	2.15E+00	1.29E-01
4.50E-01	2.08E+00	1.52E-01
5.00E-01	2.03E+00	1.77E-01
5.50E-01	2.00E+00	2.01E-01
6.00E-01	1.96E+00	2.27E-01
7.00E-01	1.92E+00	2.78E-01



Énergie du photon (MeV)	Coefficient d'atténation massique dans l'eau (cm^2/g)	Coefficient d'absorption massique dans l'eau (cm^2/g)
3.64E-01	1.10E-01	3.25E-2
6.37E-01	8.72E-02	3.27E-2